

1. Du kamuoliukai išmetami vienu metu vienas link kito tuo pačiu pradiniu greičiu: vienas – nuo žemės paviršiaus vertikaliai aukštyn, kitas – iš aukščio H vertikaliai žemyn. Apskaičiuokite kamuoliukų pradinį greitį, jei žinoma, kad jie pataikė vienas į kitą aukštyje $H/4$. Oro pasipriešinimo nepaisykite.

Sprendimas

Pasirinkus koordinačių pradžios atskaitos taško padėtį ant Žemės paviršiaus, o teigiamą y ašies kryptį parinkus vertikaliai į viršų, užrašome rutuliukų judėjimo lygtis:

$$y_1(t) = v \cdot t - \frac{1}{2}g \cdot t^2, \quad (1) \quad (2 \text{ taškai})$$

$$y_2(t) = H - v \cdot t - \frac{1}{2}g \cdot t^2, \quad (2) \quad (2 \text{ taškai})$$

čia v – rutuliukų pradinis greitis, g – laisvojo kritimo pagreitis.

Laiko momentu τ rutuliukai susitinka, ir jų padėtis yra:

$$y_1(\tau) = y_2(\tau) = \frac{1}{4}H. \quad (3) \quad (2 \text{ taškai})$$

Sudėję (1) ir (2) lygčių dešinės pusės narius ir atsižvelgę į (3) sąlygą, gauname:

$$v \cdot \tau - \frac{1}{2}g \cdot \tau^2 + H - v \cdot \tau - \frac{1}{2}g \cdot \tau^2 = \frac{1}{4}H + \frac{1}{4}H \Rightarrow \tau = \sqrt{\frac{H}{2g}}. \quad (4) \quad (2 \text{ taškai})$$

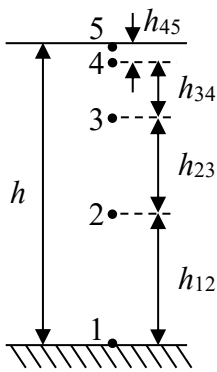
Atsižvelgę į (3) ir (4), iš rutuliuko judėjimo lygties (1) gauname pradinio greičio išraišką:

$$\frac{1}{4}H = v \cdot \sqrt{\frac{H}{2g}} - \frac{1}{2}g \cdot \frac{H}{2g} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{H \cdot g}{2}}. \quad (5) \quad (2 \text{ taškai})$$

Atsakymas: $v = \sqrt{\frac{H \cdot g}{2}}$.

2. Nuo $h = 16$ m aukščio pastato stogo periodiškai krinta vandens lašai. Tuo laiko momentu, kai pirmasis lašas pasiekia žemę, penktasis lašas atitrūksta nuo stogo. Kokie yra atstumai tarp gretimų ore esančių lašų tuo metu, kai pirmasis lašas pasiekia žemę? Oro pasipriešinimo nepaisykite.

Sprendimas



Tegul pirmasis lašas iš aukščio h nukrinta iki žemės per laiką T :

$$h = \frac{1}{2}gT^2 \Rightarrow T = \sqrt{\frac{2h}{g}}, \quad (1) \quad (1 \text{ taškas})$$

Kadangi tarp penkių lašų kritimo trukmių yra keturi lygūs laiko tarpai, tai kiekvienas paskesnis lašas nuo stogo kris praėjus laikui:

$$t = \frac{1}{4}T = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{h}{8g}}. \quad (2) \quad (1 \text{ taškas})$$

Nustatykime atstumus tarp atskirų lašų. Sąlygoje nurodytu laiko momentu ketvirtasis lašas bus kritęs laiką tarpą $t_{45} = t$, todėl atstumas tarp ketvirtojo ir penktojo lašų

yra:

$$h_{45} = \frac{1}{2}gt_{45}^2 = \frac{1}{2}gt^2. \quad (3) \quad (1 \text{ taškas})$$

Kadangi trečiasis lašas bus kritęs laiko tarpą $t_{35} = 2t$, tai atstumas tarp trečiojo ir penktojo lašo yra:

$$h_{35} = \frac{1}{2}gt_{35}^2 = \frac{1}{2}g(2t)^2 = \frac{4}{2}gt^2,$$

o ieškomas atstumas tarp trečiojo ir ketvirtojo lašo yra:

$$h_{34} = h_{35} - h_{45} = \frac{4}{2}gt^2 - \frac{1}{2}gt^2 = \frac{3}{2}gt^2. \quad (4) \quad (1 \text{ taškas})$$

Kadangi trečiasis lašas bus kritęs laiko tarpą $t_{25} = 3t$, tai atstumas tarp antrojo ir penktojo lašo yra:

$$h_{25} = \frac{1}{2}gt_{25}^2 = \frac{1}{2}g(3t)^2 = \frac{9}{2}gt^2,$$

o ieškomas atstumas tarp antrojo ir trečiojo lašo yra:

$$h_{23} = h_{25} - h_{35} = \frac{9}{2}gt^2 - \frac{4}{2}gt^2 = \frac{5}{2}gt^2. \quad (5) \quad (1 \text{ taškas})$$

Kadangi pirmasis lašas bus kritęs laiko tarpą $t_{15} = T = 4t$, o atstumas tarp pirmojo ir penktojo lašo yra lygus aukščiui $h = \frac{1}{2}gt_{15}^2 = \frac{1}{2}g(4t)^2 = \frac{16}{2}gt^2$, tai atstumas tarp pirmojo ir antrojo lašo yra:

$$h_{12} = h - h_{25} = \frac{16}{2}gt^2 - \frac{9}{2}gt^2 = \frac{7}{2}gt^2. \quad (6) \quad (1 \text{ taškas})$$

Įsirašę laiko t reikšmę (2) į aukščio formules (3)–(6), gauname galutines išraiškas bei apskaičiuojame:

$$h_{45} = \frac{1}{16}h, \quad h_{45} = 1 \text{ m.} \quad (1 \text{ taškas})$$

$$h_{34} = \frac{3}{16}h, \quad h_{34} = 3 \text{ m.} \quad (1 \text{ taškas})$$

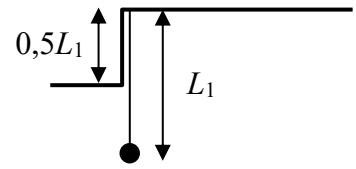
$$h_{23} = \frac{5}{16}h, \quad h_{23} = 5 \text{ m.} \quad (1 \text{ taškas})$$

$$h_{12} = \frac{7}{16}h, \quad h_{12} = 7 \text{ m.} \quad (1 \text{ taškas})$$

Iš atsakymų matyti, kad atstumai tarp lašų sudaro aritmetinę progresiją.

Atsakymas: $h_{45} = \frac{1}{16}h = 1 \text{ m}$, $h_{34} = \frac{3}{16}h = 3 \text{ m}$, $h_{23} = \frac{5}{16}h = 5 \text{ m}$, $h_{12} = \frac{7}{16}h = 7 \text{ m}$.

3. Matematinė švytuoklė, kurios siūlo ilgis L_1 , pakabinta prie lubų taip, kad į vieną pusę jai laisvai svyruoti trukdo prie lubų esantis $0,5L_1$ aukščio laiptelis. Laikykite, kad atstumas tarp siūlo ir laiptelio yra nežymus.



a) Apskaičiuokite paveiksle pavaizduotos svyruoklės mažų svyravimų periodą T .

b) Sakykime, kad turime dar vieną, laisvai svyruojančią, matematinę švytuoklę, kurios siūlo ilgis yra $L_2 = kL_1$, čia $k > 0$ yra pastovus koeficientas. Laikydami, kad abiejų svyruoklių svyravimo periodai yra vienodi, gaukite koeficiento k išraišką ir apskaičiuokite jo skaitinę vertę.

Sprendimas

a) Kai svyruoklė juda į dešinę pusę, visas siūlas gali laisvai judėti, todėl toks svyravimas atitinka svyruoklės, kurios ilgis L_1 , svyravimo periodą T_1 :

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{L_1}{g}}. \quad (1) \quad (1 \text{ taškas})$$

Kai svyruoklė juda į kairę pusę, jai trukdo laiptelis, todėl siūlas atsiremia į laiptelio kampą. Tuo metu viršutinė siūlo dalis nejuda, o apatinė svyruoja apie tašką, esantį laiptelio kampe. Toks svyravimas atitinka svyruoklės, kurios ilgis $0,5L_1$, svyravimo periodą T_2 :

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{L_1}{2g}}. \quad (2) \quad (2 \text{ taškai})$$

Vieno pilno svyravimo metu svyruoklė atlieka pusę svyravimo, kurio periodas T_1 , ir pusę svyravimo, kurio periodas T_2 , todėl visas tokios svyruoklės svyravimo periodas yra:

$$T = \frac{T_1}{2} + \frac{T_2}{2} = \pi \sqrt{\frac{L_1}{g}} + \pi \sqrt{\frac{L_1}{2g}}. \quad (3) \quad (2 \text{ taškai})$$

b) Antrosios, laisvai svyruojančio svyruoklės svyravimo periodas yra lygus:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L_2}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{kL_1}{g}}. \quad (4) \quad (1 \text{ taškas})$$

Pertvarkome pirmosios matematinės svyruoklės svyravimo periodo (3) išraišką, išskeldami bendrą daugiklį už skliaustų:

$$T = \pi \sqrt{\frac{L_1}{g}} + \pi \sqrt{\frac{L_1}{2g}} = \pi \sqrt{\frac{L_1}{g}} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right). \quad (5) \quad (1 \text{ taškas})$$

Sulyginame (4) ir (5) formules ir išreiškiame koeficientą k :

$$2\pi \sqrt{\frac{kL_1}{2g}} = \pi \sqrt{\frac{L_1}{g}} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

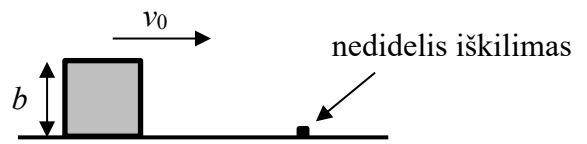
$$2\sqrt{k} = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

$$k = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2, \quad (6) \quad (2 \text{ taškai})$$

$$k \approx 0,73. \quad (1 \text{ taškas})$$

Atsakymas: $T = \pi \sqrt{\frac{L_1}{g}} + \pi \sqrt{\frac{L_1}{2g}}$, $k = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \approx 0,73$.

4. Horizontaliu keliu be trinties juda kubo formos tašelis, kurio kraštinė yra $b = 0,1$ m. Koks turi būti mažiausias tašelio greitis v_0 , kad jis užkliuvęs persiverstų per ant kelio esantį nedidelį iškilimą, kurio matmenys yra daug mažesni nei b ? Trumpai (vienu ar dviem sakiniais) paaiškinkite, kokiai sąlygai esant kubas galės persiversti per nedidelį iškilimą. Laikykite, kad nedidelio iškilimo forma nėra svarbi uždaviniui išspręsti, ir nepaisykite energijos nuostolių smūgio metu.

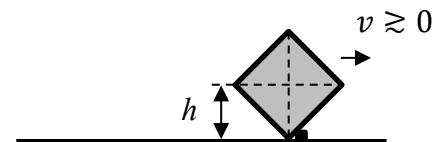


Sprendimas

Kubas, atsitrenkęs į nedidelį iškilimą, pradės verstis, sukdamasis apie apatinę briauną, esančią prie iškilimo, todėl kubo masės centras pakils. Tam, kad įveiktų iškilimą, reikia, kad kubo masės centro greitis būtų bent šiek tiek didesnis už nulį tuo metu, kai masės centras pakils į didžiausią aukštį.

(2 taškai)

Iš pavaizduoto brėžinio matyti, kad kubo masės centras pakils į didžiausią aukštį h tuomet, kai jo šoninės sienelės įstrižainė bus statmena pagrindui.



Tuo metu pilnutinė mechaninė kubo energija yra lygi:

$$E_2 = mgh,$$

(1) (2 taškai)

čia m yra kubo masė. Šiame uždavinyje kubo negalime laikyti materialiuoju tašku, nes mums yra svarbu nustatyti, kaip kubo padėtis kinta erdvėje jam užkliuvus už kliūties.

Aukštį h suskaičiuojame naudodami Pitagoro teoremą:

$$b^2 + b^2 = (2h)^2 \Rightarrow h = \frac{\sqrt{2}}{2} b. \quad (2) \quad (2 \text{ taškai})$$

Pradinė pilnutinė mechaninė kubo energija yra lygi:

$$E_1 = mg \frac{b}{2} + \frac{mv_0^2}{2}. \quad (3) \quad (2 \text{ taškai})$$

Kadangi energijos nuostolių nėra, panaudodami energijos tvermės dėsnį, iš lygčių (1)–(3) gauname:

$$mg \frac{b}{2} + \frac{mv_0^2}{2} = mg \frac{\sqrt{2}b}{2} \Rightarrow v_0 = \sqrt{(\sqrt{2} - 1)gb}, \quad (4) \quad (1 \text{ taškas})$$

$$v_0 \approx 0,64 \text{ m/s}. \quad (1 \text{ taškas})$$

Atsakymas: $v_0 = \sqrt{(\sqrt{2} - 1)gb} \approx 0,64 \text{ m/s}$.

5. Žiemos popietę fizikos laboratorijoje esantis mokinys nusprendė atlikti eksperimentą su ledu ir vandeniu. Į kalorimetrą įpylė $t_1 = 8,5$ °C temperatūros vandens ir į jį įdėjo ledo rutuliuką, kurio spindulys $R = 85$ mm, tada kalorimetrą uždarė. Kiek pasikeis ledo rutuliuko spindulys, kol nusistovės šiluminė pusiausvyra? Pradinė ledo rutuliuko temperatūra buvo $t_2 = -11$ °C, o jo masė yra lygi pradžioje į kalorimetrą įpildo vandens masei. Šilumos nuostolių nepaisykite. Vandens savitoji šiluma $c_v = 4,2$ kJ/(kg·°C), ledo savitoji šiluma $c_l = 2,1$ kJ/(kg·°C), ledo savitoji lydymosi šiluma $\lambda = 330$ kJ/kg, ledo tankis $\rho_l = 900$ kg/m³.

Sprendimas

Kadangi pagal sąlygą ištirpo ne visas ledas, eksperimento metu vanduo atvėso nuo $t_1 = 8,5$ °C iki $t_0 = 0$ °C, tuo metu atiduodamas šilumos kiekį

$$Q_1 = c_v m (t_1 - t_0). \quad (1) \quad (1 \text{ taškas})$$

Ledui šylant nuo $t_2 = -10$ °C iki $t_0 = 0$ °C, jis gauna šilumos kiekį

$$Q_2 = c_l m (t_0 - t_2). \quad (2) \quad (1 \text{ taškas})$$

Šilumos kiekis, kurį gauna ledas, ištirpęs esant lydymosi temperatūrai:

$$Q_3 = \lambda m_l, \quad (3) \quad (1 \text{ taškas})$$

čia m_l yra ištirpusio ledo masė. Taikome šilumos balanso lygtį:

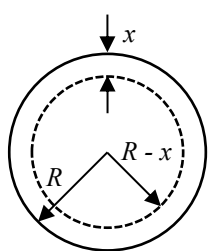
$$Q_1 = Q_2 + Q_3. \quad (4) \quad (1 \text{ taškas})$$

Į (4) lygtį įsirašome (1)–(3) ir išreiškiame ištirpusio ledo masę:

$$\begin{aligned} c_v m (t_1 - t_0) &= c_l m (t_0 - t_2) + \lambda m_l \Rightarrow \\ m_l &= m \frac{c_v(t_1 - t_0) - c_l(t_0 - t_2)}{\lambda} = m \cdot B, \end{aligned} \quad (5) \quad (1 \text{ taškas})$$

čia patogumo dėlei laikinai pasižymėjome konstantą $B = \frac{c_v(t_1 - t_0) - c_l(t_0 - t_2)}{\lambda}$, kad būtų paprasčiau toliau išvesti reikiamas lygtis. Pradinė ledo rutuliuko masė (o kartu ir į kalorimetrą iš pradžių įpildo vandens masė) yra:

$$m = \rho_l \cdot V = \rho_l \frac{4}{3} \pi R^3. \quad (6) \quad (1 \text{ taškas})$$



Sakykime, kad eksperimento metu ištirpusio ledo sluoksnio storis yra x (žr. į brėžinį). Tada ištirpusio ledo masę surandame tokiu būdu:

$$m_l = \rho_l \frac{4}{3} \pi R^3 - \rho_l \frac{4}{3} \pi (R - x)^3 = \rho_l \frac{4}{3} \pi [R^3 - (R - x)^3]. \quad (7) \quad (1 \text{ taškas})$$

(6) ir (7) išraiškas įsirašome į (5) lygtį ir išreiškiame ieškomą dydį x :

$$\rho_l \frac{4}{3} \pi [R^3 - (R - x)^3] = \rho_l \frac{4}{3} \pi R^3 B,$$

$$R^3 - (R - x)^3 = R^3 B \Rightarrow R^3(1 - B) = (R - x)^3 \Rightarrow R^3 \sqrt[3]{1 - B} = R - x.$$

Iš čia ieškomas ledo rutuliuko spindulio sumažėjimas yra

$$x = R - R^3 \sqrt[3]{1 - B} = R(1 - \sqrt[3]{1 - B}) = R \left(1 - \sqrt[3]{1 - \frac{c_v(t_1 - t_0) - c_l(t_0 - t_2)}{\lambda}} \right). \quad (2 \text{ taškai})$$

Apskaičiavę, gauname: $R \approx 1,1$ mm. (1 taškas)

Pastaba. Atsakymą galima gauti ir kitu būdu. Jei atskliaustume (7) lygties narius, gautume:

$$m_l = \rho_l \frac{4}{3} \pi [R^3 - (R - x)^3] = \rho_l \frac{4}{3} \pi (R^3 - R^3 + 3R^2x - 3Rx^2 + x^3).$$

Kadangi sluoksnis plonas ($x \ll R$), tai lygties narius $3Rx^2$ ir x^3 galime at mesti, kadangi jie yra labai maži lyginant su likusiu nariu $3R^2x$. Tada ištirpusio ledo masė:

$$m_l \approx \rho_l \frac{4}{3} \pi \cdot 3R^2x = \rho_l \cdot 4\pi R^2x. \quad (8)$$

(8) ir (6) lygtis įsirašę į (5) lygtį, išreiškiame dydį x :

$$\rho_l 4\pi R^2x = \rho \frac{4}{3} \pi R^3 B \Rightarrow x = \frac{1}{3} RB = R \frac{c_v(t_1-t_0) - c_l(t_0-t_2)}{3\lambda}, \quad x \approx 1,1 \text{ mm}.$$

Taip suskaičiuotas rezultatas nuo aukščiau rasto tikslaus atsakymo skiriasi mažiau nei 2% (o dviejų reikšminių skaitmenų tikslumu abu rezultatai visai sutampa), kas pagrindžia tokio supaprastinimo taikymo galiojimą.

Atsakymas: $x = R \left(1 - \sqrt[3]{1 - \frac{c_v(t_1-t_0) - c_l(t_0-t_2)}{\lambda}} \right) \approx 1,1 \text{ mm}$ arba

$$x = R \frac{c_v(t_1-t_0) - c_l(t_0-t_2)}{3\lambda} \approx 1,1 \text{ mm}.$$

6. Uždaras termiškai izoliuotas horizontalus cilindras padalytas į dvi dalis plonu, lengvu, šilumai laidžiu stūmokliu, kuris spyruokle pritvirtintas prie cilindro vienos galinės sienelės. Į kairę ir į dešinę nuo stūmoklio yra po ν molių idealiųjų vienantomių dujų, kurių temperatūra yra $T = 300$ K, cilindro ilgis yra $2l = 1$ m, savasis spyruoklės ilgis $L = l/2$. Kai sistema yra pusiausvyroje, spyruoklės pailgėjimas lygus $x = 0,1$ m. Tam tikru momentu stūmoklyje padaroma kiaurymė. Apskaičiuokite, kiek pasikeičia sistemos temperatūra nusistovėjus naujai pusiausvyros būsenai. Cilindro, stūmoklio ir spyruoklės šiluminės talpos nepaisykite, taip pat laikykite, kad trinties tarp stūmoklio ir cilindro sienelių nėra.

Sprendimas

Po to, kai stūmoklyje buvo padaryta kiaurymė, dujos persiskirstė taip, kad spyruoklės pailgėjimas tapo lygus nuliui, t. y. $x' = 0$. Šio procesu metu spyruoklė atsipalaidavo, o spyruoklės potencinė energija E_p buvo perduota dujoms, todėl dujos sušilo ΔT , t. y. jų vidinė energija ΔU padidėjo:

$$E_p = \Delta U. \quad (1) \quad (1 \text{ taškas})$$

Spyruoklės pradinė potencinė energija buvo lygi

$$E_p = \frac{1}{2} kx^2. \quad (2) \quad (1 \text{ taškas})$$

Vienatomių dujų vidinės energijos pokytis lygus

$$\Delta U = \frac{3}{2} \cdot 2\nu \cdot R\Delta T. \quad (3) \quad (1 \text{ taškas})$$

Nežinomą spyruoklės standumą k randame iš stūmoklį veikiančių dujų slėgio ir spyruoklės jėgų pusiausvyros pradiniu momentu:

$$F_1 + F_{sp} = F_2, \quad (4) \quad (1 \text{ taškas})$$

čia F_1 yra jėga, kuria dujos spaudžia stūmoklį iš tos pusės, kurioje nėra spyruoklės, o F_2 – iš pusės, kurioje yra spyruoklė. Dėl šioje pusėje esančio didesnio slėgio spyruoklė ištempinama jėga

$$F_{sp} = kx. \quad (5) \quad (1 \text{ taškas})$$

Pradinėje būsenoje dujų tūris spyruokle įtvirtintoje pusėje yra lygus

$$V_2 = S \left(\frac{l}{2} + x \right), \quad (6) \quad (1 \text{ taškas})$$

o kitoje stūmoklio pusėje tūris lygus

$$V_1 = S \left(\frac{3l}{2} - x \right), \quad (7)$$

čia S yra cilindro skerspjūvio plotas. Pasinaudoję sąryšiu, kad slėgis p sukelia jėgą $F = pS$, gauname dujų slėgio sukiamas jėgas, veikiančias priešingas stūmoklio sieneles:

$$F_1 = p_1 S = \frac{\nu RT}{V_1} \cdot \frac{V_1}{\frac{3l}{2} - x} = \frac{2\nu RT}{3l - 2x}, \quad F_2 = p_2 S = \frac{2\nu RT}{l + 2x}. \quad (8) \quad (1 \text{ taškas})$$

Įsirašę (5) ir (8) sąryšius į (4), gauname:

$$\frac{2\nu RT}{3l - 2x} - \frac{2\nu RT}{l + 2x} + kx = 0. \quad (9) \quad (1 \text{ taškas})$$

Iš čia išsireiškiame spyruoklės standumą k :

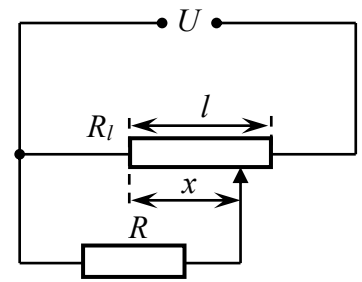
$$k = \frac{2\nu RT}{x} \left(\frac{1}{l + 2x} - \frac{1}{3l - 2x} \right). \quad (10) \quad (1 \text{ taškas})$$

Pagaliau, panaudodami (1)–(3) bei (10) formules, gauname temperatūros pokytį ΔT ir jį apskaičiuojame:

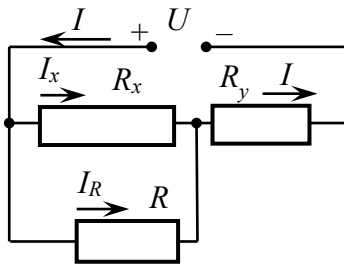
$$\Delta T = T \cdot \frac{2x}{3} \cdot \frac{l - 2x}{(l + 2x)(3l - 2x)} \approx 6,6 \text{ K}. \quad (1 \text{ taškas})$$

Atsakymas: $\Delta T = T \cdot \frac{2x}{3} \cdot \frac{l - 2x}{(l + 2x)(3l - 2x)} \approx 6,6 \text{ K}.$

7. Potenciometras, kurio pilnutinė elektrinė varža $R_l = R = 800 \Omega$, pagamintas iš $l = 12 \text{ cm}$ ilgio vielos. Prie paveiksle pavaizduotos elektrinės grandinės prijungiami įtampa $U = 6 \text{ V}$. Apskaičiuokite per rezistorių R tekančios elektros srovės stiprį, kai potenciometro slankiklio padėtis $x = 8 \text{ cm}$.



Sprendimas



Perbraižome grandinę padalindami potenciometrą į dvi dalis, kurių varžas pažymime R_x ir R_y , taip pat pažymime atitinkamais rezistoriais tekančių srovių stiprius I , I_x ir I_y . (1 taškas)

Šiame brėžinyje $R_x + R_y = R_l = al$, (1 taškas)

čia l yra potenciometro ilgis, o proporcingumo koeficientas

$$a = R_l/l. \quad (1) \quad (1 \text{ taškas})$$

Grandinė tekančios srovės stipris

$$I = I_x + I_R. \quad (1 \text{ taškas})$$

Įtampos, krintančios ant lygiagrečiai sujungtų rezistorių R ir R_x , yra lygios:

$$RI_R = R_x I_x = ax I_x \Rightarrow I_x = I_R \frac{R}{ax}. \quad (2) \quad (1 \text{ taškas})$$

Bendra grandinės įtampa yra lygi

$$U = I_x R_x + (I_x + I_R) R_y = ax I_x + a(l-x)(I_x + I_R), \quad (1 \text{ taškas})$$

Atskliaudę ir sutvarkę dešiniąją pusę, gauname:

$$U = all_x + a(l-x)I_R. \quad (1 \text{ taškas})$$

Įsirašę a ir I_x išraiškas (1)–(2) bei atsižvelgę, kad $R_l = R$, gauname

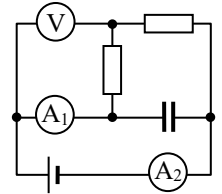
$$U = \left(\frac{l}{x} R + \frac{l-x}{l} R_l \right) I_R = \left(\frac{l}{x} + \frac{l-x}{l} \right) R I_R. \quad (1 \text{ taškas})$$

Iš čia išsireiškiame srovės stiprį I_R ir jį apskaičiuojame:

$$I_R = \frac{x l U}{R(l^2 + x(l-x))} \approx 0,00409 \text{ A} \approx 4,1 \text{ mA}. \quad (2 \text{ taškai})$$

Atsakymas: $I_R = \frac{x l U}{R(l^2 + x(l-x))} \approx 4,1 \text{ mA}$.

8. Idealus $\mathcal{E} = 12 \text{ V}$ elektrovaros šaltinis, du vienodi $R = 100 \ \Omega$ varžos rezistoriai, $C = 10 \ \mu\text{F}$ talpos kondensatorius, voltmetras bei du vienodi ampermetrai buvo sujungti į paveiksle parodytą grandinę. Nusistovėjus srovėms, voltmetras rodo $U_V = 5 \text{ V}$ įtampą, o pirmasis (A_1) ampermetras – $I_1 = 40 \text{ mA}$ srovės stiprį.



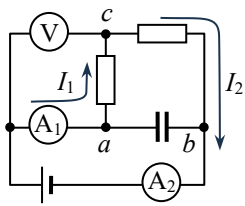
a) Ką rodo antrasis ampermetras?

b) Koks krūvis susikaupė kondensatoriuje?

Sprendimas

a) Kondensatoriui įsikrovus, juo srovė neteka. (1 taškas)

Jei visi matavimo prietaisai būtų idealūs, voltmetras rodytų kairiojo rezistoriaus įtampą, kuri būtų lygi pusei šaltinio elektrovarai, t. y. 6 V . Taigi prietaisai yra neidealūs: tegu voltmetro varža yra r_V , o ampermetrų – r_A . (1 taškas)



Pirmuoju ampermetru ir kairioju rezistoriumi teka ta pati stiprio I_1 srovė, o jų bendrą įtampą rodo voltmetras, t. y.

$$U_V = I_1(r_A + R) \Rightarrow r_A + R = U_V/I_1. \quad (1) \quad (1 \text{ taškas})$$

Antruoju ampermetru ir dešinioju rezistoriumi irgi teka to paties stiprio I_2 srovė, o jų bendra įtampa yra lygi $\mathcal{E} - U_V$, t. y.

$$\mathcal{E} - U_V = I_2(r_A + R) \Rightarrow I_2 = \frac{\mathcal{E} - U_V}{r_A + R}. \quad (1 \text{ taškas})$$

Atsižvelgę į (1), gauname ieškomą antrojo šaltinio rodomą srovės stiprį:

$$I_2 = \frac{\mathcal{E} - U_V}{U_V/I_1} = I_1 \left(\frac{\mathcal{E}}{U_V} - 1 \right). \quad (2) \quad (1 \text{ taškas})$$

Suskaičiavę, gauname: $I_2 = 56 \text{ mA}$. (0,5 taško)

b) Kondensatoriaus įtampa U_C yra lygi mazgų a ir b potencialų skirtumui: $U_C = \varphi_a - \varphi_b$. Kita vertus, ši potencialų skirtumą galima išreikšti kaip kairiojo rezistoriaus įtampos $U_{R1} = \varphi_a - \varphi_c$ ir dešiniojo rezistoriaus įtampos $U_{R2} = \varphi_c - \varphi_b$ sumą:

$$U_{R1} + U_{R2} = \varphi_a - \varphi_c + \varphi_c - \varphi_b = \varphi_a - \varphi_b = U_C. \quad (1 \text{ taškas})$$

Išreiškę rezistorių įtampas per jais tekančių srovių stiprius, gauname:

$$U_C = U_{R1} + U_{R2} = I_1 R + I_2 R = R(I_1 + I_2). \quad (1 \text{ taškas})$$

Atsižvelgę į (2), gauname:

$$U_C = R I_1 \left(1 + \frac{\mathcal{E}}{U_V} - 1 \right) = \frac{\mathcal{E} I_1 R}{U_V}. \quad (1 \text{ taškas})$$

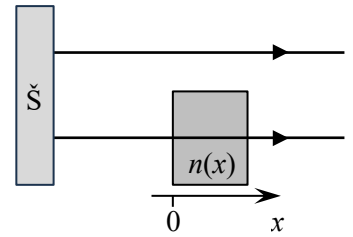
Todėl kondensatoriuje sukauptas krūvis yra

$$q = U_C C = \frac{\mathcal{E} I_1 R C}{U_V}. \quad (1 \text{ taškas})$$

Suskaičiavę, gauname: $q = 96 \ \mu\text{C}$. (0,5 taško)

Atsakymas: $I_2 = I_1 \left(\frac{\mathcal{E}}{U_V} - 1 \right) = 56 \text{ mA}$, $q = \frac{\mathcal{E} I_1 R C}{U_V} = 96 \ \mu\text{C}$.

9. Šviesos šaltinis (Š) skleidžia du koherentinius lygiagrečius bangos ilgio λ šviesos spindulius. Vienas spindulys sklinda ore, kurio lūžio rodiklis yra $n_{oro} = 1$. Antro spindulio kelyje jam statmenai padedama skaidri plokštelė, kurios lūžio rodiklis tiesiškai didėja didėjant atstumui x nuo plokštelės paviršiaus, į kurį krinta spindulys: $n(x) = n_0 + k \cdot x$, čia $n_0 > 1$ ir $k > 0$ yra žinomos konstantos. Už plokštelės optinės sistemos pagalba abu spinduliai suvedami į vieną tašką. Koks galėtų būti plokštelės storis, kad tame taške būtų stebimas interferencinis maksimumas? Nuo šaltinio iki susikirtimo abu spinduliai nusklido tą patį atstumą.



Sprendimas

Interferencijos rezultatas priklausys nuo spindulių nueitų optinių kelių skirtumo: optinio kelio medžiagoje ir optinio kelio ore.

Tegu plokštelės storis yra d . Tokį atstumą ore sklindančio šviesos spindulio nueitas optinis kelias yra

$$L_1 = n_{oro} \cdot d. \quad (1 \text{ taškas})$$

Kadangi plokštelės lūžio rodiklis $n(x)$ nuo koordinatės x priklauso tiesiškai, plokštelėje sklindančio šviesos spindulio nueitas kelias yra

$$L_2 = n_{vid} \cdot d, \quad (1 \text{ taškas})$$

čia n_{vid} yra plokštelės vidutinis lūžio rodiklis:

$$n_{vid} = \frac{1}{2} [n(0) + n(d)] = \frac{1}{2} [2n_0 + kd] = n_0 + \frac{1}{2} kd. \quad (2 \text{ taškai})$$

Kadangi iki interferencinio vaizdo susidarymo vietos abu šviesos spinduliai nusklido tą patį geometrinį atstumą, jų optinių kelių skirtumas

$$\Delta L = L_2 - L_1 = \frac{1}{2} kd^2 + (n_0 - n_{oro})d. \quad (1) \quad (1 \text{ taškas})$$

Spindulių susikirtimo vietoje bus stebimas interferencinis maksimumas, jeigu šis optinių kelių skirtumas yra šviesos bangos ilgio kartotinis:

$$\Delta L = m\lambda, \quad (2) \quad (2 \text{ taškai})$$

čia $m = 1, 2, \dots$ (akivaizdu, jog kelių skirtumas negali būti lygus 0, taigi atvejis $m = 0$ negali būti įgyvendintas). Sulyginę (1) ir (2), gauname kvadratinę lygtį:

$$\frac{1}{2} kd^2 + (n_0 - n_{oro})d - m\lambda = 0. \quad (1 \text{ taškas})$$

Ši lygtis turi du sprendinius:

$$d_{1,2} = \frac{-(n_0 - n_{oro}) \pm \sqrt{(n_0 - n_{oro})^2 + 2km\lambda}}{k}.$$

Kadangi plokštelės storis negali būti neigiamas, pasirenkame tik didesnę (teigiamą) sprendinį:

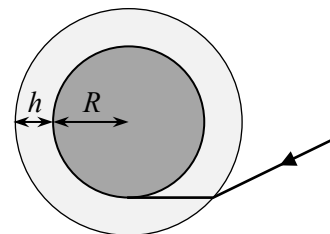
$$d = \frac{-(n_0 - n_{oro}) + \sqrt{(n_0 - n_{oro})^2 + 2km\lambda}}{k}.$$

Atsižvelgus į tai, jog pagal sąlygą $n_{oro} = 1$, pastarąją išraišką galima šiek tiek supaprastinti:

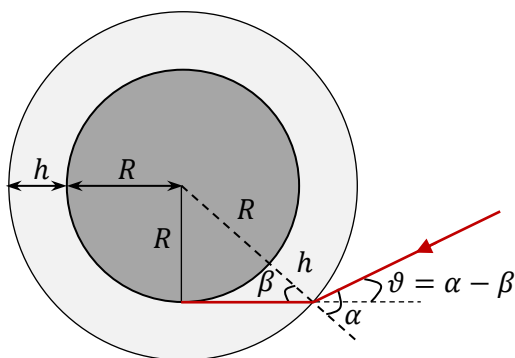
$$d = \frac{-(n_0 - 1) + \sqrt{(n_0 - 1)^2 + 2km\lambda}}{k}. \quad (2 \text{ taškai})$$

Atsakymas: $d = \frac{-(n_0 - 1) + \sqrt{(n_0 - 1)^2 + 2km\lambda}}{k}$, čia $m = 1, 2, \dots$.

10. Dėl Žemės atmosferos poveikio saulėtekis yra matomas anksčiau. Laikydami, kad Žemė yra spindulio $R = 6370$ km rutulys, o atmosfera sudaro skaidrų storio $h = 8$ km sferinį sluoksnį, kurio lūžio rodiklis $n = 1,0003$ (virš šio sluoksnio $n_0 = 1$), įvertinkite, kiek minučių anksčiau pusiaujuje stebimas saulėtekis palyginti su tuo, kas būtų visai nesant atmosferos. Paprastumo dėlei galite laikyti, jog Žemės sukimosi ašis yra statmena jos orbitos plokštumai.



Sprendimas



Papildykime brėžinį pažymėdami jame nuo saulės sklindančio šviesos spindulio kritimo (α) ir lūžio (β) kampus ties atmosferos viršutine riba. (1 taškas)

Pritaikome Snellijaus dėsnį:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n. \quad (1) \quad (1 \text{ taškas})$$

Iš stačiojo trikampio matyti, kad:

$$\sin \beta = \frac{R}{R+h}. \quad (2) \quad (1 \text{ taškas})$$

Šią išraišką įsirašę į (1), išreiškiame kritimo kampo sinusą:

$$\sin \alpha = \frac{R \cdot n}{R+h}. \quad (3) \quad (1 \text{ taškas})$$

Iš brėžinio matome, jog dėl lūžio atmosferoje šviesos spindulys nuo savo pradinės sklidimo krypties nukrypsta kampu ϑ :

$$\vartheta = \alpha - \beta = \arcsin\left(\frac{R \cdot n}{R+h}\right) - \arcsin\left(\frac{R}{R+h}\right). \quad (4) \quad (2 \text{ taškai})$$

Jeigu nebūtų atmosferos, kad ties Žemės paviršiumi pamatytume saulėtekį, reikėtų dar palaukti, kol Žemė pasisuktų apie savo ašį šiuo kampu ϑ . Šis ieškomas laikas yra lygus

$$t = \frac{\vartheta}{360^\circ} \cdot T, \quad (5) \quad (2 \text{ taškai})$$

čia $T = 24 \text{ h} = 1440 \text{ min}$ – paros trukmė. (4) išraišką įsirašę į (5), gauname:

$$t = \frac{T}{360^\circ} \left(\arcsin\left(\frac{R \cdot n}{R+h}\right) - \arcsin\left(\frac{R}{R+h}\right) \right). \quad (1 \text{ taškas})$$

Suskaičiavę, gauname $T \approx 1,5 \text{ min}$. (1 taškas)

Atsakymas: $t = \frac{T}{360^\circ} \cdot \left(\arcsin\left(\frac{R \cdot n}{R+h}\right) - \arcsin\left(\frac{R}{R+h}\right) \right) \approx 1,5 \text{ min}$.